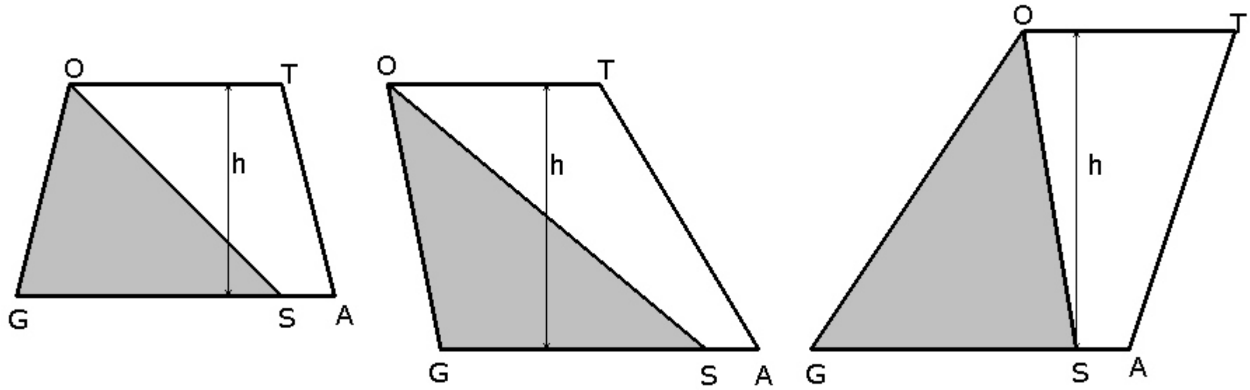
CORRECTİON Sujets 4^e et 3^e – 2017

<u>Énigme 1</u> : Cinq nombres à un chiffre pour quatre vingts [uniquement en 4^e]

☆ + ◈ + 🕯 + ⮝ + ⌛ = 20	→	2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 20	☆ = **2**
2×☆+ 🕯 + 2×⌛ = 20	→	2×2 + 4 + 2×6 = 20	◈ = **3**
1×☆+ 2×◈ + 3×🕯 = 20	→	1×2 + 2×3 + 3×4 = 20	🕯 = **4**
⮝ × 🕯 = 20	→	4 × 5 = 20	⮝ = **5**
			⌛ = **6**

<u>Recherche 2</u> : Couper, c'est du gâteau ! [uniquement en 4^e]



Quelle que soit la forme du trapèze GATO, son aire s'exprime par : $\dfrac{(GA+TO)\times h}{2} = \dfrac{(24+16)\times h}{2} = 20 \times h$.

Il faut donc placer le point S de telle sorte que l'aire de GOS = $\dfrac{GS \times h}{2}$ soit égale à : $\dfrac{20 \times h}{2}$

donc en identifiant les deux expressions : GS = 20.

<u>Recherche 3</u> : Bon poids et bonne taille

Le plus petit nombre entier qui « pèse » 20 : **45**

Expli. : 20 = 1×20 = 2×10 = 4×5 = 2×2×5.

Seuls 4 et 5 peuvent convenir et le plus petit nombre formé avec ces <u>deux</u> chiffres est 45.

Le plus petit nombre entier qui « mesure » 20 : **299**

Explications : Il faut le minimum de chiffres. Avec 2 chiffres, la somme maximale est : 9+9=18. Il faut donc ajouter 2 que l'on place en tête pour obtenir le plus petit nombre possible.

Le plus grand nombre entier qui « pèse » 20 **<u>et</u>** qui « mesure » 20 :

52 211 111 111 111

Explications : Pour être le plus grand, il faut un maximum de chiffres.
Pour peser 20, il faut 5×2×2 et des *« ×1 » .*
Comme 5+2+2 = 9, pour une mesure de 20, il manque 11. Il faut donc onze « 1 » à placer à la fin du nombre pour garder les plus grands chiffres en tête.

Taille du nombre 10^{2017} **–** 2017 ?

Posons l'opération en colonne :

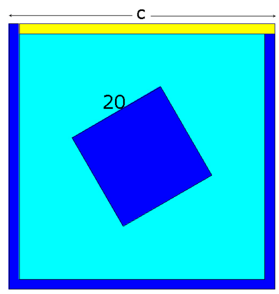
10 000 … 000 000	← *2 017 zéros après le 1*
– 2 017	
9 999 … 997 983	← *2 013 neufs en tête*

10^{2017} **–** 2 017 *a donc pour taille :*

2 013 × 9 + 7 + 9 +8 +3 = **18 144**

<u>Recherche 4</u> : Clin d'œil au bleu Klein

L'aire du carré central est : 20 cm×20 cm= 400 cm².
Si on appelle c (en cm) la mesure du côté du carré bleu clair, la bande du tour occupe 4 rectangles de 2 cm sur (c–2) cm [on prend les « coins » une fois sur 2].
Soit une aire de : 4×[2 cm×(c–2) cm]=(8c–16) cm²
Par suite, il faut donc que : 8c–16=400, donc 8c=416, ce qui conduit à : c=52.
La mesure du côté de la feuille bleu clair est donc : **52 cm.**
On peut aussi couper le carré central en 10 bandes de 2 cm de large, soit 200 cm de long, auxquels on ajoute 4×2 cm, ce qui donne : 208 cm pour le périmètre et **52 cm** pour le côté.



Il y a bien d'autres démarches…

<u>Recherche 5</u> : Deux-mille-dix-septième, mais pas le dernier !

→ Voir autre démarche en page 4

Écriture des nombres entiers les uns derrière les autres,	Nombre de chiffres utilisés :	Nombre de chiffres utilisés depuis le premier qui est « 0 » :
De 0 à 9	10	10
De 10 à 99	90×2=180	190
De 100 à 199	100×3= 300	490
De 200 à 299	100×3= 300	790
De 300 à 399	100×3= 300	1 090
De 400 à 499	100×3= 300	1 390
De 500 à 599	100×3= 300	1 690
De 600 à 699	100×3= 300	1 990
De 700 à 799	100×3= 300	2 290

Le 2 017^e^ chiffre utilisé est entre le 1 990^e^ et le 2 290^e^.
Le 7 de 700 est le 1991^e^, alors comptons pour terminer !

7	0	0	7	0	1	7	0	2	7	0	3	7	0	4	7	0	5	7	0	6	7	0	7	7	0	**8**
1 991^e^									2 000^e^										2 010^e^							**2 017^e^**

Le deux-mille-dix-septième chiffre de cette longue liste est donc un **8**.

<u>Énigme 6</u> : Soyons devin

Le message codé : **067612 E9 V619, 83503542 E9 V19.**

Voici une démarche possible

Toutes les lettres <u>manquantes</u> se trouvant dans : JUİN, JAMAİS NON SOURİANT, on en déduit que les chiffres de 0 à 9 cachent :
4 N ; 3 A ; 3 İ ; 2 J ; 2 S ; 2 O ; 2 U ; 1 M ; 1 T ; 1 R.

Avec les 4 N on trouve que le codage de N est le chiffre 9 car il est le seul à apparaître 4 fois.
D'où 067612 EN V61N, 83503542 EN V1N.
La lettre S est souvent en fin de mot, on peut donc penser que le chiffre 2 code la lettre S.
D'où 06761S EN V61N, 8350354S EN V1N.
Les chiffres 1 et 6 apparaissant chacun 3 fois, ils codent donc A et İ et conduisent entre autres soit à VIAN et VAN soit à VAIN et VIN, on en déduit donc que 6 code la lettre A et 1 code la lettre İ.
D'où 0A7AİS EN VAİN, 8350354S EN VİN.
Les chiffres 0, 3 et 5 apparaissent deux fois et doivent donc coder les lettres J ; O ; U. Comme 35 se suivent les deux fois cela doit être OU donc 3 code le O et 5 code le U. Et par conséquent 0 code le J.
D'où JA7AİS EN VAİN, 8OUJOU4S EN VİN.
Et on en déduit que 7 code le M, 8 code le T et 4 code le R.

La devise de la Confrérie des chevaliers du Tastevin est donc :

JAMAİS EN VAİN, TOUJOURS EN VİN.

Recherche 7 : **Presque vingt sur bon vin**

Du bouchon standard au bouchon de la plus grande bouteille en verre au monde, on passe d'un diamètre de 24 mm à un diamètre de 180 mm. On a donc réalisé un agrandissement de coefficient : 180 : 24 = 7,5.

Le volume d'un bouchon classique est d'environ : $\pi \times 1{,}2^2 \times 4{,}5 = 20{,}357\ 520\ldots$ cm^3

Le volume du bouchon géant est d'environ : $\pi \times 1{,}2^2 \times 4{,}5 \times \mathbf{7{,}5^3} = \mathbf{8\ 588{,}328\ 91\ldots\ cm^3}$

Propriété* : Si les longueurs sont multipliés par **k**, les aires le sont par **k²**, et les volumes par **k³** .
* Connue sous le nom du théorème du k, k², k3.

Recherche 8 : **Du sucre en grains**

En représentant graphiquement la répartition des composants du raisin, il est manifeste que le sucre occupe les 2/10 du poids total. Dans 100 g de raisin, il y a donc : 100 g × 2/10 = **20 g** de sucre.

Recherche 9 : **Dur, dur d'obtenir 20 ! → Voir autre solution en page 4**

Il y a 9 tirages possibles pour le premier jeton retourné. Il n'en reste plus que 8 pour le deuxième et 7 pour le troisième. Il y a donc : 9 × 8 × 7 = **504 combinaisons possibles** si on tient compte de l'ordre des tirages.

Établissons la liste de ceux dont la somme fait 20 :

L'un des jetons affiche	Il manque	Possibilités pour les 2 autres	Nombre de combinaisons
1	19	aucune	0
2	18	9 et 9 impossible car il n'y a qu'un 9	0
3	17	9 et 8	6*
4	16	9 et 7 (8 et 8 impossible)	6
5	15	9 et 6 ou 8 et 7	6 + 6
6	14	9 et 5 déjà compté (8 et 6 impossible)	0
7	13	9 et 4 ou 8 et 5 sont déjà comptés	0
8	12	9 et 3 ou 8 et 4 ou 7 et 5 déjà comptés	0
9	11	8 et 3 ou 7 et 4 ou 6 et 5 déjà comptés	0

* Avec ces 3 chiffres, il y a : 3 × 2 × 1 = 6 tirages possibles que l'on ne comptabilisera pas à nouveau dans les lignes de 8 et de 9.
Le nombre de combinaisons conduisant à 20 est : **24**.
On a donc 24 chances sur 504 d'obtenir 20, donc **1 chance sur 21**.

Recherche 10 : **Quatre vingts en moins** [UNİQUEMENT pour les 3^e]

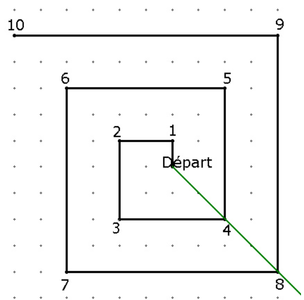
Le solide obtenu possède 4 faces qui sont des **triangles équilatéraux** et 4 faces qui sont des **hexagones réguliers**.
Il possède **8 faces**, **18 arêtes** et **12 sommets**.
Chaque petit tétraèdre coupé a des longueurs d'arêtes qui sont 3 fois plus petites que celles du grand, donc son volume est $3^3 = 27$ fois plus petit, soit 540 cm^3 : 27 = 20 cm^3. Il y a 4 petits tétraèdres à enlever, d'où le volume du solide restant : 540 cm^3 **–** 4 × 20 cm^3 = **460 cm^3** .

Recherche 11 : **Vains détours pour aller jusqu'à vingt** [UNİQUEMENT pour les 3^e]

Distance parcourue : 1 + 2 + 3 + 4 + … + 19 + 20 = **210** à la calculatrice.
Plus astucieusement, si on calcule le double de cette somme :

$$\begin{array}{r} 1 + \ 2 + \ 3 + \ 4 + \ldots + 19 + 20 \\ \underline{+\ 20 + 19 + 18 + 17 + \ldots + .\ \ 2 + \ \ 1} \\ 21 + 21 + 21 + 21 + \ldots + 21 + 21 = 20 \times 21 = 420 \end{array}$$

donc **210** pour la somme cherchée.



Distance à vol d'oiseau :
Du départ, de 4 déplacements en 4 déplacements on se retrouve sur la même diagonale sud-est. Tous les 4 déplacements (un tour), on s'éloigne de 2 diagonales de carré du point de départ, soit $2\sqrt{2}$ (Pythagore).
Comme 20 = 5 × 4, en 20 déplacements, on est donc à :

$$5 \times 2\sqrt{2} = \mathbf{10\sqrt{2} \approx 14{,}14}$$

<u>Recherche 5</u> : Deux-mille-dix-septième, mais pas le dernier !

On a 10 nombres à 1 chiffre de 0 à 9, et 90 nombres à 2 chiffres de 10 à 99, ce qui donne 190 chiffres.
Il en reste donc : 2017–190= 1827.
Pour atteindre 2017 chiffres à l'aide de nombres à 3 chiffres, il ne sera pas nécessaire d'écrire tous les nombres à 3 chiffres puisque : 3×900 > 1827.
Comme 1827 **:** 3 = 609 (quotient entier), on s'arrêtera au 609^{e} groupe de trois chiffres, c'est-à-dire à 608 car le premier groupe de trois chiffres est 100 et non 101.
Donc le 2017^{e} chiffre est un **8**.

<u>Recherche 9</u> : Dur, dur d'obtenir 20 ! Autre interprétation possible

L'énoncé, tel qu'il est proposé, indique un tirage <u>global</u> de 3 jetons retournés, on pouvait donc penser que l'ordre des numéros n'a pas d'importance.
Dans ce cas, il n'y a que 84 tirages possibles (sans ordre). L'explication n'est pas immédiate au niveau du Collège.
Il faut d'abord justifier les 504 possibilités (dans l'ordre), puis indiquer que chacune se retrouve dans : 3×2×1 = 6 possibilités d'ordres différents pour 3 numéros.
D'où les 504 **:** 6 = **84 tirages sans ordre***.
On peut alors <u>expliquer</u> que les seuls tirages dont la somme est 20 sont au nombre de **4** :

9+8+3 = 9+7+4 = 9+6+5 = 8+7+5.

Soit **4 chances sur 84**, autrement dit **1 chance sur 21**. Même résultat que dans la correction proposée plus haut, ce qui est logique puisque les bons tirages sans ordre sont aussi 6 fois moins nombreux.

* Les terminales penseront au nombre de combinaisons de 3 jetons parmi 9 que l'on note : C^3_9 .
Que l'on calcule par : 9!/[3!×(9–3)!] = **84**.
Mais au collège, on ne sait pas encore cela !