Correction 21e RALLYE – Sujet 4e et 3e – 2018

Énigme 1

Anagrammes de nombres
[UNIQUEMENT en 4e]

2018→ ↓	**8**	**2**	**0**	**1**
2	**3**	**1**	←321 ↓	**0**
1	**2**	↑ ←21→ ↓	1	**2**
0	↑ 283→	**2**	**3**	**8**
8	**0**	**1**	**2**	↑ ←2018

Recherche 2

Ce tournoi nous donne le tournis !
[UNIQUEMENT en 4e]

★ Une des solutions consiste à présenter les matchs sous la forme d'un tableau à double entrée. On ne complète que la partie supérieure ou inférieure à la diagonale afin de ne pas compter les matchs-retours et les matchs contre soi-même.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
A		3	2	5	4	7	6
B			1	6	7	5	4
C				7	6	4	5
D					1	2	3
E						3	2
F							1
G							

Chaque jour de rencontres, un nombre pair d'équipes jouent, il ne peut donc y avoir que trois matchs au maximum.
En effet, la division euclidienne de 7 par 2 donne :
$7 = 3 \times 2 + 1$ avec $1 < 2$.

Ainsi, chaque jour de rencontres, une équipe ne joue pas. Ce ne peut pas être 2 fois la même équipe ! Par exemple : A ne joue pas le jour 1, B le jour 2, … G le jour 7.
On donne dans ce tableau une programmation possible avec le numéro du jour dans la case de chaque match.
Il faut donc au minimum **7 jours** pour faire toutes les rencontres.

Autres raisonnements possibles :

Chaque équipe rencontre 6 équipes adverses. On pourrait croire qu'il y a donc $6 \times 7 = 42$ rencontres à prévoir. Mais, on compterait deux fois une même rencontre puisque lorsqu'une équipe A rencontre une équipe B, la B rencontre donc la A.
Le nombre de rencontres nécessaires est donc : $42 : 2 =$ **21**.

On peut aussi raisonner en imaginant qu'une 1re équipe rencontre les 6 autres, puis que la 2e n'a plus que 5 rencontres, etc. ; ce qui fait donc $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =$ **21** rencontres.

Enfin, en une journée, on ne peut faire jouer que **3** rencontres, soit 6 équipes, la septième n'ayant pas d'adversaire. Comme $21 = 7 \times 3$, il faut donc prévoir un minimum de **7 jours**.

★ On procède de la même façon pour 8 équipes.

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**
A		1	2	3	4	5	6	7
B			3	2	7	4	5	6
C				1	6	7	4	5
D					5	6	7	4
E						1	2	3
F							3	2
G								1
H								

Cette fois, le nombre de rencontres est : $7 \times 8 : 2 =$ **28**
Chaque jour, il peut y avoir quatre matchs au maximum.
En effet : $8 = 4 \times 2$.

$28 : 4 = 7$

Il faut donc au minimum 7 jours pour faire toutes les rencontres ; il ne faut pas prévoir plus de jours que lorsqu'il y a 7 équipes.

On propose donc ci-contre une programmation du tournoi.

Recherche 3 — Même d'Alembert s'y était trompé !

+	1	2	3	4	5	6
1						7
2					7	
3				7		
4						
5						
6						

Il y a 21 jets différents.
Seuls 3 conduisent à la somme 7.

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						8
3					8	
4				8		
5						
6						

Il y a 21 jets différents.
Seuls 3 conduisent à 8.

+	1	2	3	4	5	6
1						7
2					7	
3				7		
4			7			
5		7				
6	7					

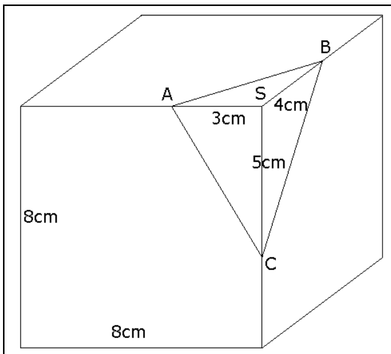
Il y a 36 jets différents.
6 conduisent à 7.

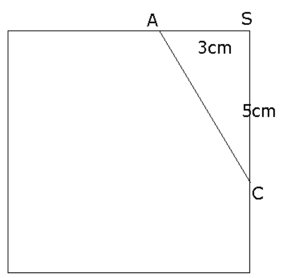
+	1	2	3	4	5	6
1						
2						8
3					8	
4				8		
5			8			
6		8				

Il y a 36 jets différents.
Seuls 5 conduisent à 8.

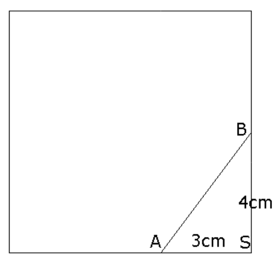
Voilà pourquoi on a **un peu plus de chances d'avoir 7** plutôt que 8 !!! Si la vidéo est en noir et blanc, on ne distinguera pas les 2 dés, et pourtant, en faisant quelques centaines d'expériences, on constate bien une prévalence de la somme 7.

Recherche 4 — Tampon patate

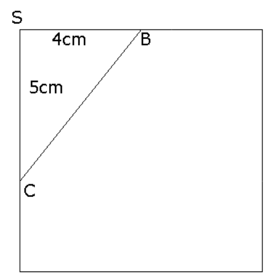




Vue de face



Vue de dessus

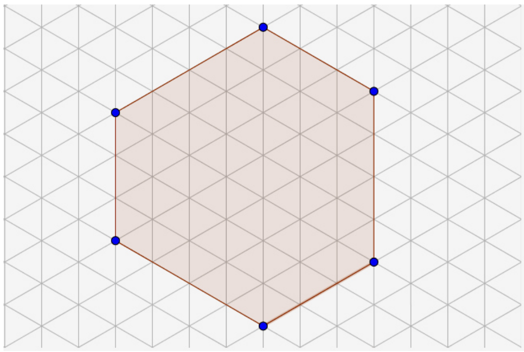


Vue de droite

Il suffit ensuite de construire le triangle ABC à la règle et au compas.

Les côtés mesurent environ : AC ≈ 5,8 cm ; AB = 5 cm ; BC ≈ 6,4 cm.

Recherche 5 **Il était une (étrange) bergère, pas rond, pas rond, et pas tapon…**



Il faut réaliser un enclos le plus « régulier » possible donc qui se rapproche d'un cercle. Compte tenu du réseau, cela ne peut être qu'un hexagone.
Comme $21 = 3 \times 7$ et que les deux nombres les plus proches dont la somme est 7 sont 4 et 3, un hexagone avec une alternance de 4 puis 3 comme valeurs de côtés donne une superficie de **72**.
Un hexagone avec une alternance de 5 puis 2 comme valeurs de côtés ne donne qu'une superficie de 69.

Recherche 6 **Question pour un champion du 21^{e} rallye**

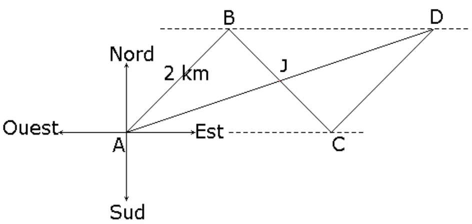
42 **:** 3 = 14. Les 3 entiers consécutifs de somme 42 ne peuvent être que 13, 14 et 15 soit M, N, O.
2 entiers impairs consécutifs ont pour somme un entier pair. Cette somme, étant le précédent du numéro de la première lettre du nom du mathématicien, est donc soit 12, soit 14.
L'entier qui est entre eux doit être pair. 12 **:** 2 = 6 et 14 **:** 2 = 7.
Seul 12 convient. 12 = 5 + 7 donc E et G.
Par suite la première lettre du nom du mathématicien est M codée 13.
Les lettres M, N, O, E et G donnent le nom de **MONGE**.

Recherche 7 **Quintes très aiguës !**

2 018 quintes valent 2 018 × 7 =14 126 demi-tons.
Or 14 126 = 1 177 × 12 + 2 donc 1 177 octaves et 2 demi-tons après le do soit : **ré**.

Techniquement, monter de 1 177 octaves est impossible ! Mais on peut réaliser ce problème en redescendant d'une ou plusieurs octaves dès que le son devient trop aigu. Mathématiquement, cela ne change rien au problème.

Recherche 8 **Curieuse course d'orientation**



Nord-est et sud-est sont des directions à 45° de l'axe ouest-est. Ce sont les angles à la base des triangles ABC et BCD qui sont donc isocèles rectangles superposables.

En 4^{e}, on mesure AD sur le dessin à l'échelle, et les 3 autres segments mesurent 2 km.

Soit J le milieu des diagonales du parallélogramme ABDC.
En 3^{e}, d'après le théorème de Pythagore, dans le triangle ABJ, rectangle en B :

$AJ^2 = AB^2 + BJ^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$ D'où $AJ = \sqrt{5}$

Donc AB+BC+CD+DA = 3×2 km + $2 \times \sqrt{5}$ km = **$(6+2\sqrt{5})$ km** ≈ **10,5 km** à 1 hm près par excès

La superficie du parallélogramme ABDC est de :

S = B × h = CD × CB = 2 km × 2 km = **4 km² = 400 ha (hectares)**

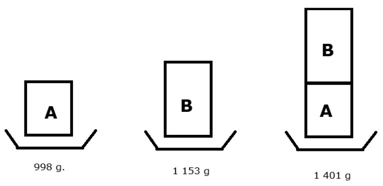
Recherche 9 — Produit géographique

21 = 1 × 21 = 3 × 7 **A** = Troyes ; **B**= Foix ; **C** = Sète
Le jeu de mot est : « **Troyes Foix Sète** » qui donne 21 !
On vérifie que : Foix est la préfecture de l'Ariège (9) et Troyes est la préfecture de l'Aube (10).
9 et 10 sont consécutifs et 9 × 10 = 90 qui est le numéro du Territoire de Belfort.
Sète est dans l'Hérault (34) et 9 + 10 + 34 = 53 qui est bien la Mayenne.
9 + 34 = 43 qui est bien la Haute-Loire.

On aurait pu donner cet exercice l'an dernier (20e rallye), à condition d'adjoindre la ville bourguignonne d'**Autun** !

21 – 1 = 20

Recherche 10 — À se crêper le chignon ! [UNIQUEMENT pour les 3e]



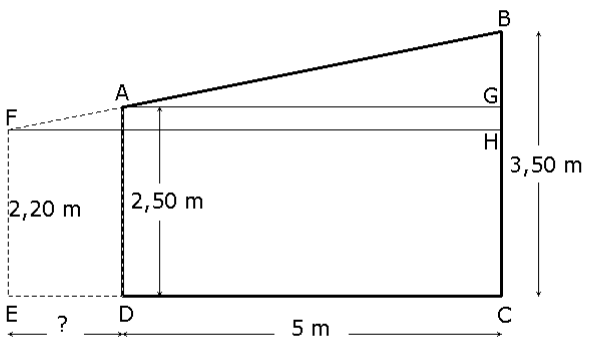
La masse des 2 plats et des 2 piles est de : 998 g + 1 153 g = 2 151 g
La masse d'un plat est de : 2 151 g – 1 401 g = **750 g**
La masse de la 1re pile de crêpes est de : 998 g – 750 g = 248 g
La masse de la 2e pile de crêpes est de : 1 153 g – 750 g = 403 g
La masse d'une crêpe doit donc être un diviseur commun à 403 et 248.

La liste des diviseurs de 248 est : 1 ; 2; 4; 8; **31**; 62; 124 et 248, et la liste des diviseurs de 403 est : 1, 13, **31**, 403. Ainsi le seul diviseur commun est 31.

Or 248 = 8 × 31 et 403 = 13 × 31

Les nombres et la masse d'une crêpe étant des entiers, on peut en déduire que :
la masse d'une crêpe est de **31 g** et leurs nombres **8** et **13**. Le total est : 8 + 13 = **21** encore !!!

Recherche 11 — Gare au hangar ! [UNIQUEMENT pour les 3e]



(AG) // (FH) donc les triangles ABG et FBH sont semblables

BG = BC – AD = 3,5 m – 2,5 m = 1 m et BH = BC – EF = 3,5 m – 2,2 m = 1,3 m

Les côtés correspondants sont proportionnels : FH/AG = BH/BG

D'où : FH = BH/BG×AG = 1,3 : 1 × 5 = 6,5

Donc ED = FH – DC = 6,5 m – 5 m = **1,5 m**

Le pourcentage d'augmentation ne dépend pas de la longueur du hangar (perpendiculaire à la face dessinée).

6,5 m **:** 5 m = 1,30

Le pourcentage d'augmentation est donc de **30 %**.